

Capítulo 08- Leis de Stokes

8.1 Introdução

Quando uma partícula sólida cai dentro de um líquido segue o que se chama Lei de Stokes, que assume o seguinte:

- (1) as partículas não são influenciadas por outras partículas ou pela parede dos canais e reservatórios;
- (2) as partículas são esféricas.
- (3) a viscosidade da água e a gravidade específica do solo são exatamente conhecidas.

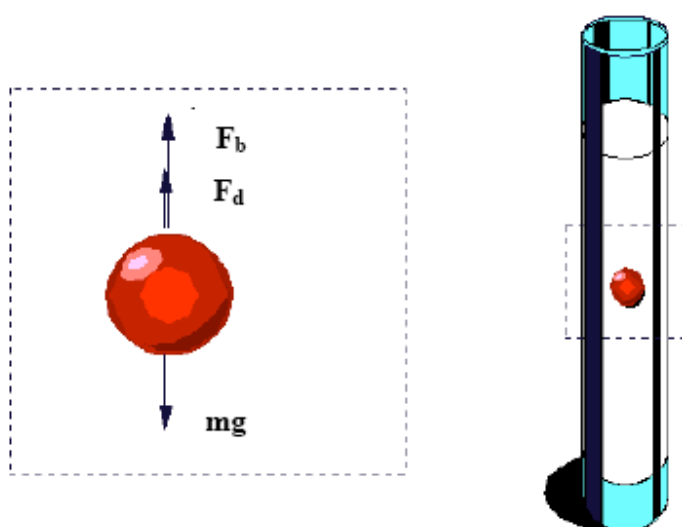


Figura 8.1- Esquema de uma esfera num fluido quiescente conforme pesquisa de George Gabriel Stokes, matemático nascido na Irlanda

Mesmo não obedecendo os dois primeiros itens, é usada a Lei de Stokes, que deve ser aplicada a esferas que tenham diâmetro entre 0,0002mm e 0,2mm (McCuen,1998).

A velocidade (uniforme) da queda de esferas, ou seja, a velocidade de deposição (velocidade de queda) da *Lei de Stokes* é a seguinte:

$$V_s = \frac{D^2 (\gamma_s - \gamma)}{18 \cdot \mu} \quad \text{(Equação 8.1)}$$

Sendo:

V_s = velocidade de deposição (m/s);

D = diâmetro equivalente da esfera (partícula) em metros

γ = peso específico da água a 20° C = 9792,34 N/m³ (Lencastre, 1983 p. 434)

γ_s / γ = 2,65 (densidade relativa do quartzo em relação a água)

γ_s = peso específico da partícula do sólido (quartzo)= 25949,701N/m³

μ = viscosidade dinâmica da água a 20° C = 0,00101 N. s /m² (Lencastre,1983)
 ρ = massa específica a 20° C = 998,2 kg/m³ (Lencastre, 1983)
 ν = viscosidade cinemática da água a 20° C= 0,00000101 m²/s (Lencastre, 1983)

$$\gamma = \rho \cdot g$$

$$\nu = \mu / \rho$$

N_R = número de Reynolds

$$N_R = (\rho \cdot V_s \cdot d) / \mu$$

Stokes chegou na seguinte equação:

$$V_s = 2 \times r^2 (\rho_{\text{sfera}} - \rho_{\text{fluido}}) \times g / (9 \cdot \mu)$$

Como o $r = d/2$, fazendo-se as substituições teremos:

$$V_s = 2 \times (d/2)^2 (\rho_{\text{sfera}} - \rho_{\text{fluido}}) \times g / (9 \cdot \mu)$$

$$V_s = d^2 (\rho_{\text{sfera}} - \rho_{\text{fluido}}) \times g / (18 \cdot \mu)$$

Como $\gamma = \rho \cdot g$ será eliminado o valor de g

$$V_s = d^2 [(\gamma_{\text{sfera}} - \gamma_{\text{fluido}}) / g] \times g / (18 \cdot \mu)$$

$$V_s = d^2 (\gamma_{\text{sfera}} - \gamma_{\text{fluido}}) / (18 \cdot \mu)$$

$$V_s = d^2 (\gamma_s - \gamma) / (18 \cdot \mu)$$

$$V_s = [D^2 (\gamma_s - \gamma)] / 18 \cdot \mu$$

A Lei de Stokes se aplica a partículas com diâmetro até 0,10mm quando o número de Reynolds é menor do que 1. Para partículas >0,1mm calculamos conforme item 8.3 usando três equações básicas que estão no Item 8.3.

Dica: a lei de Stokes aplica-se a partículas com diâmetro $\leq 0,10\text{mm}$.

8.2 Velocidade de sedimentação em função do diâmetro da partícula

$$V_s = D^2 \times (\gamma_s - \gamma) / (18 \cdot \mu)$$

$$V_s = [(25949,701-9792,34) / (18 \times 0,00101)] \times D^2$$

Para D em milímetros temos:

$$V_s = [(25949,701-9792,34) / (18 \times 0,00101)] \times D^2$$

$$V_s = \{[(25949,701-9792,34) / (18 \times 0,00101)] / 1000 \times 1000\} \times D^2$$

$$V_s = 0,8887 \times D^2$$

Sendo:

V_s = velocidade de sedimentação (m/s)

D = diâmetro da partícula (mm)

Uma observação muito importante na aplicação da Lei de Stokes é a verificação do número de Reynolds que deverá sempre ser menor que 1 para validação do que Stokes fez.

Dica: o número de Reynolds deverá ser menor que 1 para que possa ser aplicada a Lei de Stokes.

Alguns autores sugerem usar como limite do número de Reynolds o valor 0,5 ou 1,0.

Exemplo 8.1

Calcular a velocidade de sedimentação V_s para diâmetro de partícula $D=0,1$ mm.

$$V_s = 0,8887 \times D^2$$

$$V_s = 0,8887 \times 0,1^2$$

$$V_s = 0,00889 \text{ m/s}$$

Vamos calcular o número de Reynolds

$$N_R = (\rho \cdot V_s \cdot d) / \mu$$

$$N_R = (998,2 \times 0,00889 \times (0,1/1000)) / 0,00101 = 0,88 < 1 \text{ OK}$$

8.3 Quando o número de Reynolds >1

Quando o número de Reynolds for maior que 1, haverá uma resistência no fluido que diminuirá a velocidade de sedimentação das partículas. Então a velocidade de sedimentação será um pouco menor e para resolver o problema precisamos fazer por tentativas a resolução de três equações conforme *Stormceptor*, 1977 que são:

$$N_R = (\rho \cdot V_s \cdot d) / \mu = V_s \cdot d / \nu$$

$$C_D = 24/N_R + 3/(N_R \times 0,5) + 0,34$$

$$V_s = (4gd(\gamma_s - \gamma) / (3 \cdot C_D \cdot \gamma))^{0,5}$$

Sendo:

C_D = coeficiente de resistência (adimensional)

N_R = número de Reynolds (adimensional)

Por tentativas entramos com o valor da velocidade de sedimentação, calculamos o número de Reynolds, depois C_D e novamente achamos o novo valor de V_s que contém o valor do coeficiente de resistência C_D . Chegaremos até um ponto em que os valores estimados e calculados são praticamente iguais.

Na Figura (8.1)B podemos ver o desvio do coeficiente de resistência C_D para número de Reynolds entre 1 a 100.

Isto pode ser feito numa planilha eletrônica Excel.

Na prática até partícula com diâmetro 0,10mm é usada a Lei de Stokes e para partículas acima daquele diâmetro é usado o coeficiente de resistência com a resolução das três equações.

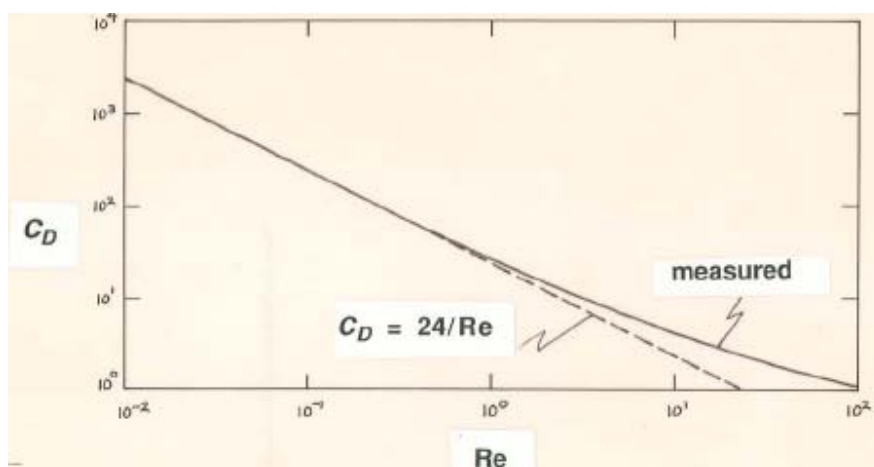


Figura 8.1B- Desvio do coeficiente de resistência C_D para número de Reynolds entre 1 e 100.

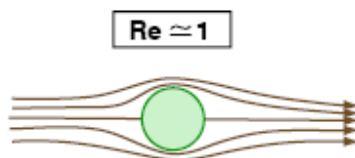


Figura 8.1C- Quando o número de Reynolds é praticamente igual a 1 o que acontece para partículas até 0,11mm de diâmetro.

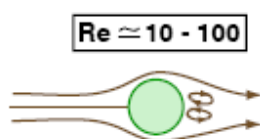


Figura 8.1D- Quando o número de Reynolds está entre 10 e 100 para partículas de 0,27mm a 0,81mm. O fluxo já começa a se separar.

Exemplo 8.2

Calcular a velocidade de sedimentação V_s para diâmetro de partícula $D=0,125\text{mm}$.

$$V_s = 0,8887 \times D^2$$

$$V_s = 0,8887 \times 0,125^2$$

$$V_s = 0,0139 \text{ m/s}$$

Vamos calcular o número de Reynolds

$$N_R = (\rho \cdot V_s \cdot d) / \mu$$

$$N_R = (998,2 \times 0,0139 \times (0,125/1000)) / 0,00101 = 1,72 > 1 \quad \text{Não se aplica Stokes}$$

Vamos então aplicar usar as três equações e calcular o valor de V_s que estão nas Tabelas (8.1) e (8.2). Entramos com o valor $V_s=0,011\text{m/s}$ e achamos $V_s=0,0101\text{m/s}$

Portanto, o valor correto a ser aplicado para a velocidade de sedimentação para partícula de 0,125mm é **0,011m/s** e não **0,0139m/s**.

Tabela 8.1- Cálculos por tentativas da velocidade de sedimentação quando o número de Reynolds for maior que 1.

Velocidade de Sedimentação (m/s)	Diâmetro da Partícula (mm)	densidade da água (kg/m ³)	peso específico da água (N/m ³)	Peso específico da partícula (N/m ³)
0,0139	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0123	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0116	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0113	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0111	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0110	0,125	998,2	9792,34	25949,701

0,0110	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0110	0,125	998,2	9792,34	25949,701
0,0110	0,125	998,2	9792,34	25949,701

Tabela 8.2- Cálculos por tentativas da velocidade de sedimentação quando o número de Reynolds for maior que 1.

Viscosidade dinâmica a 20°C (N x s/m ²)	Reynolds N _R	Coefficiente de Resistência C _D	Vs calculado (m/s)
0,00101	1,72	17,81	0,01231
0,00101	1,52	20,07	0,01159
0,00101	1,43	21,29	0,01126
0,00101	1,39	21,91	0,01110
0,00101	1,37	22,22	0,01102
0,00101	1,36	22,38	0,01098
0,00101	1,36	22,46	0,01096
0,00101	1,35	22,50	0,01095
0,00101	1,35	22,52	0,01095

8.4 Determinação da velocidade de sedimentação para partículas >0,1mm.

Para partículas $\leq 0,1\text{mm}$ vale a Lei de Stokes já explicada acima. Haam et al, 1994 apresenta uma estimativa baseado no polinômio de Lagrange e feita por Wilson, et al, 1982 e que é para quando o número de Reynolds for maior que 0,5.

$$\log V_s = -0,34246 (\log d)^2 + 0,98912 \cdot \log d + 1,14613 \quad \text{para partícula } >0,1\text{mm}$$

Sendo:

V_s = velocidade de sedimentação em cm/s

d = diâmetro da partícula d_{50} em mm

\log = logaritmo na base 10

Pela definição de logaritmo temos o valor de V_s .

$$V_s = 10^{-0,34246 (\log d)^2 + 0,98912 \cdot \log d + 1,14613}$$

$vs = V_s/100$

vs = velocidade de sedimentação (m/s)

Exemplo 8.1

Calcular a velocidade de sedimentação para uma partícula com diâmetro 0,2mm

$$\log V_s = -0,34246 (\log d)^2 + 0,98912 \cdot \log d + 1,14613$$

$$\log V_s = -0,34246 (\log 0,2)^2 + 0,98912 \cdot \log 0,2 + 1,14613$$

$$\log V_s = 0,287452851$$

$$V_s = 10^{0,287452851} = 1,938442 \text{ cm/s}$$

$$vs = V_s/100 = 1,938442/100 = 0,019384 \text{ m/s}$$

8.5 Densidade específica

Normalmente se adota a densidade específica de uma partícula como sendo 2,65 que é a densidade específica de partículas de areia. Na prática existem outras densidades específicas que dependem do local podendo ser 1,3; 1,8 e 2,2 conforme Tabela (8.3).

Tabela 8.3- Diâmetro das partículas, porcentagens da massa e densidade específica

Diâmetro da partícula (μm)	Porcentagem da massa (%)	Densidade específica
20	20	1,3
60	20	1,8
150	20	2,2
400	20	2,65
2000	20	3,65

Fonte: USEPA, 1983 in Stormceptor, 1997

8.6 Velocidade de sedimentação das partículas

Uma observação interessante é que variando a densidade específica da partícula de 1,3; 1,8 e 2,65 variará também a velocidade de sedimentação. Observar que a velocidade empírica achada pela USEPA, 1984 é de 65 a 150 vezes mais baixa do que a calculada para densidade específica de 2,65.

Tabela 8.4- Comparação da velocidade de sedimentação

Partícula (μm)	Densidade específica			
	1,3 (m/s)	1,8 (m/s)	2,65 (m/s)	Usepa, 1983 (m/s)
20	0,00007	0,00017	0,00036	0,00000254
60	0,00059	0,00157	0,00323	0,0000254
130	0,0025	0,0057	0,0112	0,000127
400	0,016	0,037	0,065	0,00059267
4000	0,18	0,3	0,45	0,0055033

Fonte: *Stormceptor*, 1997.

8.6 Granulometria dos sedimentos

Na prática adotam-se os seguintes valores para os cursos de água naturais (Lloret, 1984):

$$\gamma_s = 2.650 \text{ kg/m}^3 \text{ (peso específico seco)}$$

$$\gamma'_s = 1.650 \text{ kg/m}^3 \text{ (peso específico submerso)}$$

Para o reconhecimento do tamanho dos grãos de um solo, realiza-se a análise granulométrica, que consiste, em geral, de duas fases: peneiramento e sedimentação (Souza Pinto, 2000).

O peso do material que passa em cada peneira, referido ao peso seco da amostra, é considerado como a “porcentagem que passa” representado graficamente em função da abertura da peneira em escala logarítmica (Souza Pinto, 2000). A abertura nominal da peneira é considerada como o “diâmetro” das partículas. Trata-se, evidentemente de um “diâmetro equivalente”, pois as partículas não são esféricas.

A análise por peneiramento tem como limitação a abertura da malha das peneiras, que não pode ser tão pequena quanto o diâmetro de interesse. A menor peneira costumeiramente empregada é a de n.º 200, cuja abertura é de 0,075mm.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) adota, para classificação das partículas, a Tabela (8.5).

Tabela 8.5- Limite das frações de solo pelo tamanho dos grãos

Fração	Limites definidos pela norma da ABNT
Matacão	de 25cm a 1m
Pedra	de 7,6cm a 25cm
Pedregulho	de 4,8mm a 7,6cm
Areia grossa	de 2mm a 4,8mm
Areia média	de 0,42mm a 2mm
Areia fina	de 0,05mm a 0,42mm
Silte	de 0,005mm a 0,05mm
Argila	inferior a 0,005mm

Fonte: Souza Pinto, 2000 p. 4

Souza Pinto, 2000 diz que na prática, diferentemente da norma da ABNT, a separação entre areia e silte é tomada como 0,075mm, devido a peneira nº 200, que é a mais fina usada em laboratórios.

Tabela 8.6 - Velocidade de sedimentação de partículas esféricas conforme Lei de Stokes para número de Reynolds menor que 1.

Tipo de solo	Diâmetro partícula		Velocidade de sedimentação vs
	µm	(mm)	(m/s)
Argila	1	0,0010	0,0000009
	1,5	0,0015	0,0000020
	2	0,0020	0,0000036
Silte	3	0,0030	0,0000080
	4	0,0040	0,0000142
	5	0,0050	0,0000222
	6	0,0060	0,0000320
	7	0,0070	0,0000435
	8	0,0080	0,0000569
	9	0,0090	0,0000720
	10	0,0100	0,0000889
	12	0,0120	0,0001280
	15	0,0150	0,0002000
	20	0,0200	0,0003555
	25	0,0250	0,0005555
	30	0,0300	0,0007999
	40	0,0400	0,0014220
Areia	50	0,0500	0,0022219
	60	0,0600	0,0031995
	67	0,0670	0,004000
	80	0,0800	0,0056880
	100	0,1000	0,0088874

8.7 Remoção de partículas das águas pluviais

Considerando uma área urbana, as precipitações que caem nas casas, ruas, avenidas e estradas, parques, etc transportam sólidos, variando desde argila até agregados maiores. A variação do diâmetro das partículas dependem do local, do vento, das precipitações e de outras variáveis.

Infelizmente não temos pesquisas feitas no Brasil e mostraremos somente as pesquisas americanas que são as seis curvas mostradas na Figura (8.2).

Conforme Rinker, 2004 a primeira curva da distribuição das partículas de monitoramento do *Stormceptor* refere-se a uma firma americana que faz produtos para a decantação de sólidos usadas muito em estradas de rodagens.

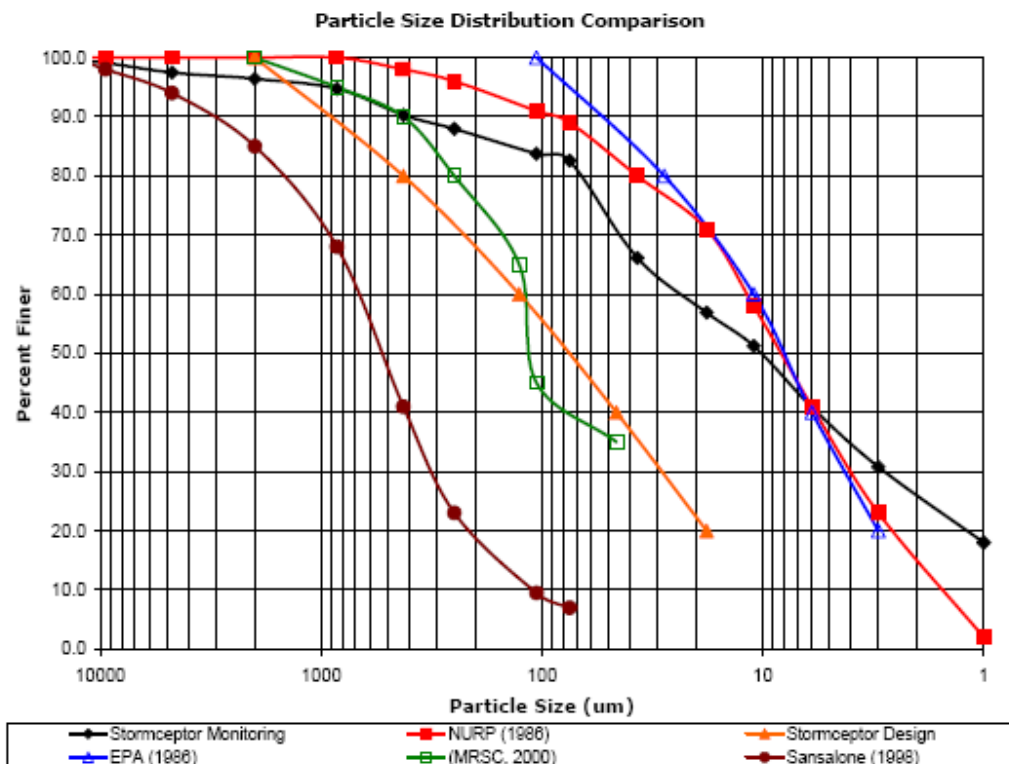
A segunda da EPA, 1986 devido ao trabalho coordenado por E. Driscoll.

A terceira curva de partículas é a do NURP, 1986 que fez inúmeras pesquisas.

A quarta curva de partículas é do MRSC, 2000- *Municipal Research & Services de Washington* que fez pesquisa somente em um local.

A quinta curva é a de projeto do *Stormceptor* que é uma firma americana de equipamentos que é baseada no MOE (*Ministry of Environment Stormwater Practices Manual* de 1994) de Ontário e que por sua vez é baseada na Usepa, 1983.

A sexta curva é J. Sansolone, foi feita uma pesquisa somente em determinado local, não tendo portanto, muita importância.



NURP - National Urban Runoff Program (EPA, 1983)
EPA - Detention Basin Analysis (EPA, 1986)
MRSC - Municipal Research & Services Center (of Washington)

Figura 8.2- Comparação da distribuição do tamanho de partículas de águas pluviais nos Estados Unidos conforme Rinker, 2004.

Rinker, 2004 concluiu que para a melhoria da qualidade das águas pluviais, temos que capturar partículas $<100\mu\text{m}$, onde se depositará de 50% a 100% das partículas. Rinker, 2004 salienta ainda que Walker, 1997 associou a deposição de metais e outros poluentes em águas pluviais quando houver deposição de partículas menores que $100\mu\text{m}$.

Salientamos que adotamos para pré-tratamento a deposição de partículas maiores que $125\mu\text{m}$

8.8 Bibliografia e livros consultados

- HAAN, C.T. et al. *Design Hydrology and sedimentology for small catchments*. Academic Press, 1994, 588páginas, ISBN 13:978-0-12-312340-4
- LENCASTRE, A. *Hidráulica Geral*. 1983, 645 páginas
- RINKER, 2004. *Particle size distribution (PSD) in stormwater runoff*.
http://www.rinkermaterials.com/ProdsServices/downloads/InfoBriefs_Series/IS%20601%20Particle%20Size%20Distribution%20_PSD_%20in%20Stormwater%20Run.pdf
- STORMCEPTOR. *Technology Assessment Report*. Dezembro de 1997. Preparado pelo dr. Eric Winkler da University of Massachusetts Amherst.
- TOMAZ, PLINIO. *Poluição Difusa*. Navegar Editora, 2006.
- USEPA. *Stormwater Best management practice design guide*. Volume 2- Vegetative biofilters. EPA/600/R-04/121A setembro 2004.