

Capítulo 132

Routing com Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

“Nunca podemos alcançar a verdade, só podemos conjecturar”
Karl Popper

SUMÁRIO

Ordem	Assunto
132.1	Introdução
132.2	Tradicional: método Modificado de Pulz, 1928
132.3	Método de <i>Runge-Kutta</i>
132.4	Formulação matemática da curva cota - volume do reservatório
132.5	Bibliografia e livros consultados

Capítulo 132-Routing com Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

132.1 Introdução

Carl David Runge (1856-1927) era um matemático e físico alemão; M. Wilhelm Kutta (1867-1944) era um matemático alemão. Os métodos de Runge-Kutta são obtidos por meio da expansão em série de Taylor com resto de Lagrange.

Existe o Routing em rios que é o chamado Método de Muskingum-Cunge e o Routing de reservatórios que é o nosso objetivo.

Para se fazer um *routing* de reservatório é comum aprendermos o Método Modificado de Pulz que foi criado em 1928 que está praticamente em todos os livros de Hidrologia. O Método Modificado de Pulz é semi-gráfico típico das **equações transcendentais** conforme Subramanya, 2013 e devido a facilidade de aprendizado continua a ser o mais usado no mundo.

Entretanto existem outros métodos com solução numérica que podem ser usados em planilhas eletrônicas Excell e que também são fáceis de serem usados. Um deles o mais recomendado e o mais preciso é o Método de 4ª ordem de *Runge-Kutta*, também conhecido como método (R-K) ou (SRK) conforme Subramanya, 2013 (*Standard Fourth-Order Runge-Kutta*).

Chow, 1988 apresentou o método de Runge-Kutta de terceira ordem, entretanto apresentaremos Runge-Kutta para 4ª ordem conforme Bedient, 2008.

A grande vantagem do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem pode ser usado com vertedores, orifícios no fundo ou válvulas reguladas com tempo. No método transformamos facilmente as equações diferenciais em soluções numéricas.

O intervalo de tempo a ser adotado é muito importante, pois, quanto menor for, maior será a precisão nos resultados.

Vários autores pensam que deve ser abandonado o método modificado de Pulz, entretanto na prática a precisão com o uso do método de Runge-Kutta de 4ª ordem não tem muito significado. Mesmo assim acham especialistas, que deve ser usado o método mais preciso.

Bediente, 2008 informa que o Método de Primeira Ordem de Runge-Kutta é também chamado de Método de Euler. O Método de Segunda Ordem de Runge-Kutta é também chamado de Método de Heun.

A grande vantagem se usar RK4 é evitar as equações transcendentais usadas no Método de Pulz e que precisam de método gráfico ou de interpolação linear.

Ulrich 4Maniak, 1997 autor do livro Hydrologie und Wasserwirtschaft adota o Método de Pulz.

132.2 Tradicional : método Modificado de Pulz

No *routing* hidrológico, no caso de reservatórios de retenção, é indicado o método de armazenamento ou seja o *método modificado de Pulz* elaborado em 1928.

A equação de continuidade ou a equação de *routing* de armazenamento da seguinte forma conforme (Akan,1993).

$$I - Q = dS/dt$$

(Equação 132.1)

onde:

I= vazão de entrada
 Q= vazão de saída
 S= volume armazenado
 t= tempo

Aproximadamente temos:

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

A Equação (132.1) pode ser rescrita da seguinte maneira:

$$I \cdot \Delta t - Q \cdot \Delta t = \Delta S$$

Se os subscritos 1 e 2 são usados para o tempo t e t + Δt, respectivamente, então teremos:

$$\frac{(I_1 + I_2)}{2} \Delta t - \frac{(Q_1 + Q_2)}{2} \Delta t = S_2 - S_1$$

$$\frac{(I_1 + I_2)}{2} \Delta t + S_1 - \frac{Q_1}{2} \Delta t = S_2 + \frac{1}{2} Q_2 \Delta t$$

Multiplicando os dois membros da equação por x 2 temos:

$$(I_1 + I_2) \Delta t + 2 S_1 - Q_1 \Delta t = 2 S_2 + Q_2 \Delta t$$

Dividindo por Δt temos a denominada **EQUAÇÃO TRANSCENDENTAL**:

$$(I_1 + I_2) + (2 S_1 / \Delta t - Q_1) = (2 S_2 / \Delta t + Q_2) \quad \text{(Equação 132.2)}$$

sendo:

I₁ = vazão no início do período de tempo
 I₂ = vazão no fim do período de tempo
 Q₁ = vazão de saída no início do período de tempo
 Q₂ = vazão de saída no fim do período de tempo
 Δt = duração do período de tempo
 S₁ = volume no início do período de tempo

S_2 = volume no fim do período de tempo

Na Equação (132.2) os valores de I_1 , I_2 , Q_1 , S_1 são conhecidos em qualquer tempo t e os valores Q_2 e S_2 são desconhecidos.

Temos portanto a Equação (132.2) e duas incógnitas Q_2 e S_2 . Precisamos de mais uma equação para resolver o problema. A outra equação que fornece o armazenamento S_2 em função da descarga.

Não devemos esquecer que estamos aplicando para o modelo a Síntese pois conhecemos a hidrógrafa de entrada no reservatório, conhecemos o modelo das fórmulas das descargas dos vertedores retangulares e orifícios das seções de controle e desconhecemos a hidrógrafa de jusante, isto é, na saída do reservatório, é o que queremos (McCuen, 1997).

O procedimento de routing proposto é chamado de *Método Modificado de Puls* (McCuen, 1997, p. 641).

(Akan, 1993) sugere os seguintes procedimentos:

- (1) De uma da relação cota-volume e cota-descarga podemos obter a curva de armazenamento S em função da vazão de saída Q .
- (2) Selecione um tempo de incremento, Δt . Prepare um gráfico onde conste a quantidade $[2S/\Delta t + Q]$ na abscissa e em ordenada a vazão de saída Q .
- (3) Para qualquer intervalo de tempo calcule $(I_1 + I_2)$ da hidrógrafa de entrada e $[2S_1/\Delta t - Q_1]$ da condição inicial ou do tempo prévio.
- (4) Calcule $[2S_2/\Delta t + Q_2]$ da Equação (132.2)
- (5) Obtenha Q_2 do gráfico obtido em (2). Este será a vazão de saída no tempo t_2 .
- (6) Para o próximo passo, calcule $[2S_2/\Delta t - Q_2]$ subtraindo $2Q_2$ de $[2S_2/\Delta t + Q_2]$ e volte para a etapa (3). Obviamente o valor de $[2S_2/\Delta t - Q_2]$ calculado em qualquer tempo será $[2S_1/\Delta t - Q_1]$ para o próximo passo.
- (7) Repita o mesmo procedimento até que o método de *routing* esteja completo

132.3 Novo método: método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

O método que fornece mais precisão nos cálculos é o (R-K).

Vamos seguir as explicações de Bedient, 2008.

A altura do nível de água H pode ser calculada da seguinte maneira:

$$H_{n+1} = H_n + (1/6) (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \Delta t$$

Sendo: +

H_n = altura no tempo n (m)

t_n = tempo (s)

Δt = intervalo de tempo (s)

Observar que K_1 , K_2 , K_3 e K_4 são funções.

$$K_1 = f(t_n; H_n)$$

$$K_2 = f(t_n + \Delta t/2; H_n + 0,5 \times K_1 \Delta t)$$

$$K_3 = f(t_n + \Delta t/2; H_n + 0,5 \times K_2 \Delta t)$$

$$K_4 = f(t_n + \Delta t; H_n + K_3 \Delta t)$$

Conforme Chow, 1988

$$dS/dt = I(t) - Q(H)$$

$$dS = A(H) dH$$

$$dH/dt = [Q_{in}(t) - Q_{out}(H)] / A(H) = f(t, H)$$

$$\Delta H_1 = \{ [I(t_j) - Q(H_j)] / A(H_j) \} \Delta t$$

Explicando melhor. Para uma dada área da seção longitudinal de uma bacia $A(h)$ que é calculada em função da altura do nível de água H .

A vazão de saída em um vertedor retangular adotado pelo DAEE, 2005 é:

$$Q_{out} = 1,55 \times L \times H^{3/2}$$

A vazão de entrada Q é fornecida pelo hidrograma.

$$K_1 = [Q(t_n) - Q_{out}(H_n)] / \text{Area}(h)$$

$$K_2 = [Q(t_n + \Delta t/2) - Q_{out}(H_n + 0,5 \times K_1 \Delta t)] / \text{área}(h)$$

$$K_3 = [Q(t_n + \Delta t/2) - Q_{out}(H_n + 0,5 \times K_2 \Delta t)] / \text{área}(h)$$

$$K_4 = [Q(t_n + \Delta t) - Q_{out}(H_n + K_3 \Delta t)] / \text{Area}(h)$$

Exemplo 132.1 Baseado em Bedient, 2008

Fazer o *routing* de um reservatório com:

Área longitudinal constante do reservatório: $A = 121,5$ ha

Intervalo de tempo $\Delta t = 12$ h.

Vazão de saída do vertedor retangular $Q_{out} = 1,55 \times L \times H^{3/2}$

Sendo $L = 6,25$ m $Q = 9,68 \times H^{1,5}$

É fornecido o hidrograma de entrada em m^3/s com intervalos de 12h conforme Tabela (132.1).

Tabela 132.1- Dados do problema

N	Time (h)	Inflow Q (m3/s)	Inflow Qmedio (m3/s)	Δt (h)
0	12	1,132		12
1	24	0,991	1,061	12
2	36	1,047	1,019	12
3	48	3,538	2,292	12
4	60	9,622	6,580	12
5	72	16,273	12,947	12
6	84	20,433	18,353	12
7	96	20,942	20,687	12
8	108	19,046	19,994	12
9	120	12,905	15,975	12
10	132	7,075	9,990	12

Tabela 132.2- Calculos na unidade SI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	Time	Inflow Q	Qmedio	Δ t	H	H	H	H	Qout
	(h)	(m3/s)	(m3/s)	(h)	H_n	H_n + 0,5 x K₁ Δt	H_n + 0,5 x K₁ Δt	H_n + K₃ Δt	(m3/s)
					(m)	(m)	(m)	(m)	
0	12	1,132		12	0,0000	0,0201	0,0184	0,0369	0,000
1	24	0,991	1,061	12	0,0367	0,0511	0,0528	0,0688	0,184
2	36	1,047	1,019	12	0,0681	0,0799	0,1050	0,1379	0,385
3	48	3,538	2,292	12	0,1379	0,1848	0,2412	0,3311	0,898
4	60	9,622	6,580	12	0,3329	0,4580	0,5097	0,6680	2,586
5	72	16,273	12,947	12	0,6693	0,8523	0,8601	1,0473	5,979
6	84	20,433	18,353	12	1,0431	1,2253	1,1775	1,3389	10,183
7	96	20,942	20,687	12	1,3273	1,4578	1,3798	1,4803	13,596
8	108	19,046	19,994	12	1,4664	1,5325	1,4239	1,4496	15,324
9	120	12,905	15,975	12	1,4309	1,3958	1,3247	1,2613	14,880
10	132	7,075	9,990	12	1,2525	1,1528	1,0395	0,8878	12,683

Tabela 132.3- Cálculos na unidade SI

11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	3	4					ΔH	
Qout	Qout	Qout	K1	K2	K3	K4	H1	Qout
(m3/s)	(m3/s)	(m3/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m3/s)
0,028	0,024	0,069	0,0000009317	0,0000008507	0,0000008536	0,0000007588	0,0367	0,1
0,112	0,118	0,175	0,0000006642	0,0000007466	0,0000007417	0,0000007182	0,0681	0,2
0,218	0,329	0,496	0,0000005448	0,0000017068	0,0000016157	0,0000025035	0,1379	0,5
0,769	1,147	1,844	0,0000021723	0,0000047824	0,0000044717	0,0000064017	0,3329	1,9
3,000	3,523	5,285	0,0000057910	0,0000081870	0,0000077568	0,0000090435	0,6693	5,3
7,616	7,722	10,374	0,0000084723	0,0000088363	0,0000087494	0,0000082785	1,0431	10,3
13,130	12,368	14,997	0,0000084358	0,0000062202	0,0000068470	0,0000048930	1,3273	14,8
17,039	15,689	17,435	0,0000060458	0,0000024321	0,0000035432	0,0000013262	1,4664	17,2
18,365	16,447	16,895	0,0000030633	-0,0000019670	-0,0000003883	-0,0000032838	1,4309	16,6
15,962	14,759	13,712	-0,0000016255	-0,0000049155	-0,0000039251	-0,0000054628	1,2525	13,6
11,982	10,260	8,097	-0,0000046157	-0,0000098617	-0,0000084440	-0,0000066640	0,9077	8,4

Vamos explicar coluna por coluna de 1 a 19.

Coluna 1- é a ordem das linhas iniciando por zero.

Coluna 2- é o tempo variando de zero até 132h variando com intervalo de 12h.

Coluna 3- é a vazão do hidrograma de entrada no reservatório em m³/s obtido por um programa como o SCS.

Coluna 4- É o Qmedio que iremos usar no método de Runge-Kutta

Coluna 5- é a unidade de tempo usada $\Delta t = 12h$ que deverá ser transformada em segundo ficando $\Delta t = 12 \times 3600s$.

Coluna 6- São os valores de H que serão usados para o calculo de $Q_{out} = 9,68 H^{3/2}$

O valor de H na linha numero 1 será o valor de H obtido na primeira linha da coluna 18 onde está o H1.

Coluna 14- valor de K1

$$K1 = [\text{coluna 3 igual a } 1,132 \text{ m}^3/\text{s} - \text{coluna 10 igual a zero}] / (121,5 \text{ h} \times 10.000\text{m}^2)$$

$$K1 = (1,132-0)/(121,5 \times 100000 = 0,000000317 \text{ m/s}$$

Coluna 7

$$= H \text{ da coluna 6} + 0,5 * K1 * 12 * 3600$$

$$= 0 + 0,5 \times K1 \times 12 \times 3600 = 0,0201 \text{ m}$$

Coluna 11-

$$= 9,68 Q_{out} \times 0,0201^{1,5} \text{ da coluna 7} = 0,028$$

Coluna 15-valor de K2

$$= (\text{coluna 4 linha } 1 = 1,061 - Q_{out} \text{ da coluna } 12 = 0,028) / (121,5 \times 10000) = 0,0000008507 \text{ m/s}$$

E assim por diante...fazendo os cálculos na mesma linha.

$$K_1 = [Q(t_n) - Q_{out}(H_n)] / \text{Area}(h)$$

$$K_2 = [Q(t_n + \Delta t/2) - Q_{out}(H_n + 0,5 \times K_1 \Delta t)] / \text{área}(h)$$

$$K_3 = [Q(t_n + \Delta t/2) - Q_{out}(H_n + 0,5 \times K_2 \Delta t)] / \text{área}(h)$$

$$K_4 = [Q(t_n + \Delta t) - Q_{out}(H_n + K_3 \Delta t)] / \text{Area}(h)$$

132.4 Formulação matemática da curva cota - volume do reservatório

Segundo (Akan,1993) a curva cota-volume de reservatórios naturais ou artificiais pode ser representada pela expressão:

$$S = b h^c \quad \text{(Equação 132.3)}$$

Sendo:

S= volume do reservatório

h= lâmina d'água sobre a saída

b, c = parâmetros constantes que dependem da forma do reservatório

A constante c não tem dimensão e a constante b tem a dimensão [comprimento]^{3-c}.

As constantes b, c dependem do tamanho e da forma do reservatório. Por exemplo, se o reservatório tem paredes verticais, então $c=1$ e $b=$ área da seção horizontal.

Se existe tabulados N pares da curva cota-volume, então as constante b, c podem ser achadas através de análise de regressão:

$$c = \frac{\Sigma (\log S) (\log h) - \frac{(\Sigma \log S) (\Sigma \log h)}{N}}{\Sigma (\log h)^2 - \frac{(\Sigma \log h)^2}{N}} \quad \text{(Equação 132.4)}$$

Para o valor de b temos:

$$b = 10^{[\Sigma \log S - c (\Sigma \log h)] / N} \quad \text{(Equação 132.5)}$$

Exemplo 132.2

Seja um reservatório natural com 87.990m³. A curva cota-volume foi obtida de 0,10m em 0,10m com N=30. Fazendo-se a planilha da análise de regressão por (Akan,1993) p. 128 obtemos a Tabela (132.4).

O volume (*Storage*) S em função da altura h é a Equação (132.3):

$$S = b h^c$$

Sendo $c=0,999561$ e $b= 29331,58$ teremos:

$$S = 29331,58 h^{0,999561}$$

Tabela 132.4- Planilha para cálculo da fórmula matemática da curva cota-volume de um reservatório natural.

Altura h N=30 (m)	log h	(logh) ²	Volume (m ³)	log S	(logh) *(logS)
0,1	-1,000	1,000	2933	3,467	-3,467
0,2	-0,699	0,489	5866	3,768	-2,634
0,3	-0,523	0,273	8799	3,944	-2,062
0,4	-0,398	0,158	11732	4,069	-1,619
0,5	-0,301	0,091	14665	4,166	-1,254
0,6	-0,222	0,049	17598	4,245	-0,942
0,7	-0,155	0,024	20531	4,312	-0,668
0,8	-0,097	0,009	23464	4,370	-0,424
0,9	-0,046	0,002	26397	4,422	-0,202
1,0	0,000	0,000	29330	4,467	0,000
1,1	0,041	0,002	32263	4,509	0,187
1,2	0,079	0,006	35196	4,546	0,360
1,3	0,114	0,013	38129	4,581	0,522
1,4	0,146	0,021	41062	4,613	0,674
1,5	0,176	0,031	43995	4,643	0,818
1,6	0,204	0,042	46928	4,671	0,954
1,7	0,230	0,053	49861	4,698	1,083
1,8	0,255	0,065	52794	4,723	1,206
1,9	0,279	0,078	55727	4,746	1,323
2,0	0,301	0,091	58660	4,768	1,435
2,1	0,322	0,104	61593	4,790	1,543
2,2	0,342	0,117	64526	4,810	1,647
2,3	0,362	0,131	67459	4,829	1,747
2,4	0,380	0,145	70392	4,848	1,843
2,5	0,398	0,158	73325	4,865	1,936
2,6	0,415	0,172	76258	4,882	2,026
2,7	0,431	0,186	79191	4,899	2,113
2,8	0,447	0,200	82124	4,914	2,198
2,9	0,462	0,214	85057	4,930	2,279
3,0	0,477	0,228	87990	4,944	2,359
	Σ= 2,424	Σ= 4,152		Σ= 136,443	Σ= 14,979
c= 0,999561		b=29331,58		S=29331,58*h ^{0,999561}	

Nota: testei esta formulação para caso real em que há orifício e vertedores e o erro foi muito grande, tornando praticamente impossível de se usar uma curva como explicada acima. Ficando então mais fácil, usar o Método Modificado de Pulz do que R-K de quarta-ordem.

Exemplo 132.3- Caso real

Reservatório de detenção projetado pela firma Hagaplan no córrego São João, bairro Alegre do município de São João da Boa Vista em São Paulo.

Seja um reservatório natural com 250.334,80m³. A curva cota-volume foi obtida em sete intervalos, portanto N=7. Fazendo-se a planilha da análise de regressão por (Akan,1993) p. 128 obtemos a Tabela (132.5).

Tabela 132.5- Planilha para cálculo da fórmula matemática da curva cota-volume de um reservatório natural.

Altura h N=7 (m)	log h	(logh) ²	Volume (m ³)	log S	(logh) x (logS)
0,6	-0,22	0,05	402,30	2,60	-0,58
1,6	0,20	0,04	6562,30	3,82	0,78
2,6	0,41	0,17	28101,30	4,45	1,85
3,6	0,56	0,31	65437,80	4,82	2,68
4,6	0,66	0,44	122251,30	5,09	3,37
5,6	0,75	0,56	201477,80	5,30	3,97
6,1	0,79	0,62	250334,80	5,40	4,24
	Σ= 3,15	Σ= 2,19		Σ= 31,48	Σ= 16,31
	c= 2,78	b=1761,94		S=1761,94 . h^{2,78}	

O volume (*Storage*) S em função da altura h é a Equação (132.1):

$$S = b h^c$$

Sendo:

c=2,78

b=1761,94

$$S = 1761,94 \cdot h^{2,78}$$

$$S = b \cdot H^c$$

Derivando em relação a H temos:

$$dS/dH = b \cdot c \cdot H^{c-1}$$

Sendo:

S= armazenamento (*storage*) (m³)

H= nível da água (m)

A= área do reservatório (m²) em função de H e escreve-se A(H).

b,c= coeficientes da análise de regressão

Exemplo 132.3

Fazer o Routing usando o Método de Runge-Kutta 4ª ordem

Trata-se de um reservatório retangular com área de 16.786 m² com orifício na parte mais baixa com diâmetro de 0,80. A 3,60m do fundo está um vertedor com largura L=2,00m. O intervalo de tempo é de 2,5min.

Tabela 132.6-

Runge-Kutta 4a ordem									
1	2	3	4	5	Unjidades SI				
					6	7	8	9	10
n	Time (min)	Inflow (m3/s)	Qmedio (m3/s)	Δ t (h)	H (m)	H (m)	H (m)	H (m)	Qout (m3/s)
0	0,00	0		2,5	0,0000	0,0000	0,0034	0,0060	0,000
1	2,50	1,51	0,757	2,5	0,0064	0,0126	0,0187	0,0307	0,110
2	5,00	4,31	2,911	2,5	0,0308	0,0490	0,0547	0,0784	0,242
3	7,50	6,98	5,643	2,5	0,0785	0,1079	0,1134	0,1482	0,387
4	10,00	9,57	8,273	2,5	0,1483	0,1886	0,1970	0,2455	0,532
5	12,50	13,42	11,496	2,5	0,2456	0,3025	0,3139	0,3822	0,684
6	15,00	18,69	16,057	2,5	0,3822	0,4619	0,4753	0,5682	0,853
7	17,50	24,85	21,768	2,5	0,5683	0,6747	0,6896	0,8107	1,041
8	20,00	31,71	28,277	2,5	0,8108	0,9469	0,9566	1,1023	1,243
9	22,50	36,24	33,973	2,5	1,1023	1,2578	1,2625	1,4227	1,449
10	25,00	38,57	37,405	2,5	1,4227	1,5877	1,5921	1,7615	1,647
11	27,50	40,72	39,646	2,5	1,7615	1,9352	1,9392	2,1169	1,832
12	30,00	42,69	41,703	2,5	2,1170	2,2987	2,2989	2,4808	2,008
13	32,50	42,93	42,808	2,5	2,4808	2,6629	2,6596	2,8383	2,174
14	35,00	41,59	42,262	2,5	2,8383	3,0138	3,0097	3,1812	2,326
15	37,50	39,93	40,760	2,5	3,1812	3,3485	3,3439	3,5066	2,462
16	40,00	37,97	38,948	2,5	3,5066	3,6647	3,6599	3,8132	2,585
17	42,50	36,01	36,988	2,5	3,8128	3,9603	3,9540	4,0954	3,000
18	45,00	34,03	35,017	2,5	4,0952	4,2299	4,2224	4,3499	3,874
19	47,50	31,70	32,865	2,5	4,3498	4,4695	4,4614	4,5735	4,892
20	50,00	29,16	30,430	2,5	4,5733	4,6771	4,6700	4,7670	5,929
21	52,50	27,01	28,084	2,5	4,7668	4,8566	4,8504	4,9342	6,921
22	55,00	25,20	26,105	2,5	4,9341	5,0116	5,0060	5,0783	7,843
23	57,50	23,59	24,394	2,5	5,0782	5,1448	5,1395	5,2012	8,682
24	60,00	22,06	22,824	2,5	5,2011	5,2576	5,2529	5,3050	9,429
25	62,50	20,69	21,373	2,5	5,3049	5,3523	5,3483	5,3920	10,080
26	65,00	19,53	20,107	2,5	5,3919	5,4316	5,4281	5,4644	10,641
27	67,50	18,47	18,997	2,5	5,4644	5,4972	5,4940	5,5239	11,118
28	70,00	17,49	17,976	2,5	5,5238	5,5505	5,5473	5,5709	11,516
29	72,50	16,40	16,945	2,5	5,5708	5,5913	5,5880	5,6054	11,835
30	75,00	15,24	15,821	2,5	5,6053	5,6195	5,6165	5,6278	12,072
31	77,50	14,08	14,659	2,5	5,6277	5,6360	5,6332	5,6388	12,226
32	80,00	12,93	13,508	2,5	5,6388	5,6416	5,6393	5,6401	12,302
33	82,50	11,96	12,449	2,5	5,6400	5,6385	5,6367	5,6335	12,311
34	85,00	11,14	11,554	2,5	5,6334	5,6284	5,6270	5,6207	12,265

Cálculos hidrológicos e hidráulicos para obras municipais
Capítulo 132- Routing com Método de Runge-Kutta de quarta ordem
 Eng Plínio Tomaz 03/10/2015 pliniotomaz@uol.com.br

35	87,50	10,45	10,797	2,5	5,6207	5,6129	5,6119	5,6032	12,177
36	90,00	9,86	10,158	2,5	5,6031	5,5933	5,5925	5,5820	12,056
37	92,50	9,37	9,617	2,5	5,5820	5,5706	5,5700	5,5581	11,911
38	95,00	8,95	9,161	2,5	5,5581	5,5456	5,5452	5,5323	11,749
39	97,50	8,60	8,775	2,5	5,5323	5,5190	5,5188	5,5052	11,574
40	100,00	8,30	8,449	2,5	5,5052	5,4914	5,4909	5,4766	11,391
41	102,50	7,88	8,089	2,5	5,4765	5,4617	5,4610	5,4454	11,199
42	105,00	7,35	7,613	2,5	5,4454	5,4291	5,4286	5,4118	10,993
43	107,50	6,90	7,126	2,5	5,4118	5,3945	5,3942	5,3766	10,772
44	110,00	6,53	6,714	2,5	5,3766	5,3586	5,3581	5,3396	10,542
45	112,50	6,03	6,280	2,5	5,3396	5,3205	5,3197	5,3000	10,302
46	115,00	5,45	5,742	2,5	5,2999	5,2794	5,2789	5,2578	10,049
47	117,50	4,95	5,201	2,5	5,2578	5,2362	5,2359	5,2140	9,782
48	120,00	4,53	4,743	2,5	5,2140	5,1918	5,1908	5,1677	9,508
49	122,50	3,84	4,185	2,5	5,1677	5,1436	5,1429	5,1182	9,223
50	125,00	3,25	3,541	2,5	5,1182	5,0929	5,0924	5,0667	8,922
51	127,50	2,75	2,996	2,5	5,0667	5,0404	5,0402	5,0137	8,613
52	130,00	2,32	2,535	2,5	5,0137	4,9870	4,9869	4,9601	8,302
53	132,50	1,97	2,145	2,5	4,9601	4,9332	4,9295	4,8990	7,992
54	135,00	0	0,983	2,5	4,8990	4,8648	4,8657	4,8323	7,645

Tabela 132.7-

		Larg. Vertedor L (m)= 2,00							
		Hv soleira (m)= 3,60							
		Diametro(m) 0,8							
Area (ha)=		1,6786	16786	m2					
11	12	13	14	15	16	17	18	19	
2	3	4					Delta H		
Qout	Qout	Qout	K1	k2	k3	k4	H1	Qout	
(m3/s)	(m3/s)	(m3/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m/s)	(m)	(m3/s)	
0,000	0,080	0,107	0,0000000000	0,0000450925	0,0000403101	0,0000837903	0,0064	0,110	
0,155	0,189	0,242	0,0000836241	0,0001641997	0,0001622045	0,0002422954	0,0308	0,242	
0,306	0,323	0,386	0,0002422632	0,0003179688	0,0003169430	0,0003926204	0,0785	0,387	
0,453	0,465	0,531	0,0003926092	0,0004658145	0,0004651357	0,0005383509	0,1483	0,532	
0,600	0,613	0,684	0,0005383455	0,0006491612	0,0006483829	0,0007589985	0,2456	0,684	
0,759	0,773	0,853	0,0007589941	0,0009113566	0,0009105103	0,0010625893	0,3822	0,853	
0,938	0,952	1,041	0,0010625855	0,0012409183	0,0012401149	0,0014182010	0,5683	1,041	
1,134	1,146	1,243	0,0014181981	0,0016170155	0,0016162731	0,0018148864	0,8108	1,243	
1,343	1,350	1,449	0,0018148841	0,0019438737	0,0019434659	0,0020725207	1,1023	1,449	
1,548	1,551	1,647	0,0020725194	0,0021361373	0,0021359625	0,0021997804	1,4227	1,647	
1,739	1,742	1,832	0,0021997798	0,0022582336	0,0022580906	0,0023166967	1,7615	1,832	
1,920	1,922	2,008	0,0023166963	0,0023699711	0,0023698531	0,0024232516	2,1170	2,008	
2,093	2,093	2,174	0,0024232512	0,0024255310	0,0024255263	0,0024279970	2,4808	2,174	

Cálculos hidrológicos e hidráulicos para obras municipais
Capítulo 132- Routing com Método de Runge-Kutta de quarta ordem
Eng Plínio Tomaz 03/10/2015 pliniotomaz@uol.com.br

2,253	2,251	2,326	0,0024279969	0,0023834805	0,0023835646	0,0023392837	2,8383	2,326	2
2,396	2,395	2,462	0,0023392838	0,0022854208	0,0022855166	0,0022318648	3,1812	2,462	2
2,526	2,524	2,585	0,0022318649	0,0021697952	0,0021698998	0,0021080236	3,5066	2,585	2
2,694	2,686	3,001	0,0021080236	0,0020430198	0,0020434616	0,0019662027	3,8128	3,000	3
3,418	3,398	3,874	0,0019662532	0,0018824723	0,0018836424	0,0017963572	4,0952	3,874	3
4,389	4,359	4,892	0,0017963950	0,0016964018	0,0016981958	0,0015971156	4,3498	4,892	5
5,432	5,394	5,930	0,0015971576	0,0014891984	0,0014914427	0,0013837929	4,5733	5,929	6
6,451	6,414	6,922	0,0013838399	0,0012887979	0,0012909794	0,0011967822	4,7668	6,921	7
7,409	7,374	7,844	0,0011968275	0,0011138156	0,0011158627	0,0010339427	4,9341	7,843	8
8,290	8,257	8,683	0,0010339855	0,0009593707	0,0009613135	0,0008879428	5,0782	8,682	9
9,083	9,051	9,429	0,0008879835	0,0008185839	0,0008204688	0,0007524358	5,2011	9,429	10
9,781	9,752	10,081	0,0007524754	0,0006906013	0,0006923384	0,0006318182	5,3049	10,080	11
10,384	10,359	10,642	0,0006318548	0,0005792389	0,0005807553	0,0005293729	5,3919	10,641	11
10,902	10,878	11,119	0,0005294051	0,0004822720	0,0004836590	0,0004376987	5,4644	11,118	12
11,337	11,316	11,517	0,0004377283	0,0003954851	0,0003967491	0,0003556066	5,5238	11,516	12
11,697	11,675	11,836	0,0003556336	0,0003126798	0,0003139819	0,0002721971	5,5708	11,835	12
11,975	11,953	12,072	0,0002722249	0,0002291393	0,0002304582	0,0001885819	5,6053	12,072	13
12,169	12,148	12,226	0,0001886100	0,0001483641	0,0001496043	0,0001105101	5,6277	12,226	13
12,283	12,264	12,303	0,0001105366	0,0000729467	0,0000741096	0,0000376077	5,6388	12,302	13
12,322	12,306	12,311	0,0000376325	0,0000075728	0,0000085040	-0,0000206822	5,6400	12,311	13
12,300	12,288	12,265	-0,0000206624	-0,0000444503	-0,0000437139	-0,0000668121	5,6334	12,265	13
12,231	12,221	12,177	-0,0000667964	-0,0000853807	-0,0000848068	-0,0001028565	5,6207	12,177	12
12,124	12,116	12,057	-0,0001028443	-0,0001171276	-0,0001166881	-0,0001305663	5,6031	12,056	12
11,989	11,984	11,911	-0,0001305569	-0,0001412990	-0,0001409699	-0,0001514138	5,5820	11,911	12
11,834	11,830	11,749	-0,0001514068	-0,0001592448	-0,0001590059	-0,0001666334	5,5581	11,749	12
11,664	11,661	11,574	-0,0001666283	-0,0001720952	-0,0001719296	-0,0001772572	5,5323	11,574	12
11,484	11,482	11,391	-0,0001772536	-0,0001807941	-0,0001806876	-0,0001841460	5,5052	11,391	11
11,299	11,295	11,199	-0,0001841437	-0,0001912202	-0,0001910087	-0,0001979067	5,4765	11,199	11
11,101	11,096	10,993	-0,0001979021	-0,0002077514	-0,0002074592	-0,0002170578	5,4454	10,993	11
10,885	10,882	10,772	-0,0002170516	-0,0002239550	-0,0002237519	-0,0002304925	5,4118	10,772	11
10,659	10,656	10,542	-0,0002304882	-0,0002350000	-0,0002348684	-0,0002392880	5,3766	10,542	10
10,425	10,422	10,302	-0,0002392850	-0,0002469657	-0,0002467439	-0,0002542508	5,3396	10,302	10
10,180	10,175	10,049	-0,0002542461	-0,0002644144	-0,0002641238	-0,0002740588	5,2999	10,049	10
9,918	9,915	9,782	-0,0002740528	-0,0002810524	-0,0002808545	-0,0002877141	5,2578	9,782	9
9,647	9,645	9,509	-0,0002877099	-0,0002921454	-0,0002920216	-0,0002963913	5,2140	9,508	9
9,371	9,365	9,223	-0,0002963885	-0,0003089658	-0,0003086191	-0,0003209268	5,1677	9,223	9
9,076	9,072	8,922	-0,0003209198	-0,0003297460	-0,0003295062	-0,0003381727	5,1182	8,922	8
8,770	8,767	8,613	-0,0003381676	-0,0003439591	-0,0003438042	-0,0003495233	5,0667	8,613	8
8,458	8,457	8,302	-0,0003495198	-0,0003528709	-0,0003527828	-0,0003561299	5,0137	8,302	8
8,147	8,146	7,992	-0,0003561276	-0,0003575301	-0,0003574938	-0,0003589451	4,9601	7,992	7
7,838	7,817	7,645	-0,0003589437	-0,0004083632	-0,0004071098	-0,0004554497	4,8990	7,645	7
7,454	7,459	7,275	-0,0004554273	-0,0004440788	-0,0004443598	-0,0004334130	4,8323	7,275	7

132.5 Programa RK-4 em Excel

Fizemos um modelo de RK4 usando Excel.

O truque são as interpolações para achar a vazão Q em função de H.

Outro truque é usar a área em função de H, usando sempre um anterior.

No exemplo que fizemos a área transversal do reservatório para o Routing era constante. Para fazer uma equação da A(H) em função de H, podemos usar a metodologia que está em 134.4, ou usar interpolação linear.

Fizemos uma comparação de Routing usando Runge-Kutta 4ª ordem e o método de Pulz, sendo que o resultado praticamente foi o mesmo. Isto se deve ao fato de usarmos intervalo de tempo muito pequeno, isto é, 150s.

Exemplo 132.4- Comparação entre RK4 e Pulz

Tabela 132.8- Comparação de valores entre RK4 e Pulz

n	Time (hj)	R-K 4	Pulz
		(m3/s)	(m3/s)
0	0	0,006043	0,01
1	0,0417	0,029235	0,03
2	0,0833	0,07429	0,07
3	0,1250	0,143788	0,14
4	0,1667	0,319561	0,32
5	0,2083	0,421842	0,42
6	0,2500	0,766355	0,77
7	0,2917	1,117503	1,12
8	0,3333	1,42984	1,43
9	0,3750	1,705858	1,70
10	0,4167	1,954764	1,95
11	0,4583	2,184937	2,18
12	0,5000	2,396586	2,40
13	0,5417	3,696372	3,68
14	0,5833	5,946393	5,92
15	0,6250	8,507177	8,47
16	0,6667	11,11693	11,08
17	0,7083	13,73914	13,66
18	0,7500	18,21413	18,10
19	0,7917	22,57675	22,47
20	0,8333	25,79979	25,74
21	0,8750	28,03579	28,00
22	0,9167	29,22552	29,22
23	0,9583	29,64865	29,65
24	1,0000	29,51829	29,53

25	1,0417	29,01867	29,03
26	1,0833	28,28203	28,30
27	1,1250	27,39087	27,41
28	1,1667	26,37761	26,39
29	1,2083	25,30847	25,32
30	1,2500	24,18689	24,20
31	1,2917	22,97384	22,98
32	1,3333	21,71495	21,72
33	1,3750	20,50903	20,51
34	1,4167	19,47252	19,48
35	1,4583	18,46476	18,47
36	1,5000	17,5041	17,51
37	1,5417	16,60209	16,60
38	1,5833	15,96092	15,96
39	1,6250	15,37321	15,37
40	1,6667	14,79758	14,80
41	1,7083	14,2132	14,21
42	1,7500	13,61967	13,62
43	1,7917	13,22903	13,23
44	1,8333	12,90083	12,90
45	1,8750	12,54575	12,55
46	1,9167	12,16553	12,17
47	1,9583	11,72504	11,73
48	2,0000	11,23747	11,24
49	2,0417	10,73985	10,74
50	2,0834	10,24743	10,25
51	2,1251	9,776523	9,78
52	2,1668	9,310573	9,31
53	2,2085	8,812815	8,82
54	2,2502	8,308782	8,31

132.5 Bibliografia e livros consultados

- BEDIENT, PHILIP B. et al. *Hydrology and floodplain analysis*. Editora Prentice Hall, 4ª edição, 795 páginas, ano 2008 com ISBN 13: 978-0-13-174589-6.
- CHOW, VEN. *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, 1988, 572 páginas, ISBN 0-07-100174-3.
- MANIAK, ULRICH. *Hydrologie und Wasserwirtschaft*. Springer, 1997, 650 páginas, Deutschland, ISBN 3-540-56968-53.
- SUBRAMANYA, K. *Engineering Hydrology*, 4ª ed. 534 páginas. Editora McGraw Hill, New Delhi. 2013. ISBN 13-9-38-328653-9.